Si l'on est constamment dans la première hypothèse, l'élimination de τ_1, τ_2, ... entre (α'') et (α') donnera

$$\tau \leqq \sqrt[2i+1]{27^i\, 2^{i(i-3)}\, \tau_i}\ \mathrm{T}^{\frac{1}{2+\frac{1}{i}}}.$$

Pour i très grand, le second membre (τ_i restant constant) tend vers zéro à peine plus lentement que $\sqrt{\mathrm{T}}$.

Si l'on a (β''), ou s'il existe une valeur de i qui donne lieu à (β''), τ tend vers zéro comme $\sqrt{\mathrm{T}}$.

M. Lebesgue : *Sur le problème des isopérimètres et sur les domaines de largeur constante.*

Le problème des isopérimètres peut, comme l'on sait, être ainsi posé : tracer un domaine pour lequel le rapport $\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{S}}$, du carré du périmètre à l'aire du domaine, soit le plus petit possible. C'est sous cette forme que je l'envisagerai.

J'admets démontré, ce qui est facile, que la solution de ce problème ne peut être donnée que par un domaine convexe. Le contour convexe qui limite un tel domaine, étant supposé parcouru dans le sens direct, admet parallèlement à toute direction une et une seule tangente dirigée; en entendant par tangente au contour une droite qui a des points communs avec le contour, mais aucun point intérieur au domaine. Un contour convexe est défini par l'ensemble de ces tangentes ou, ce qui revient au même, par un ensemble dénombrable de tangentes correspondant à des directions denses dans tout angle. Si l'on compte les directions à partir d'une origine quelconque, et si α désigne un arc incommensurable avec π, toutes les tangentes parallèles aux directions $m\alpha$ où m est entier suffiraient à déterminer le contour. Les directions α_1, α_2, α_3, ... étant choisies pour les tangentes, chacune des tangentes correspondantes dépend d'un paramètre, par exemple sa distance à un point fixe. Le problème des isopérimètres, problème du calcul des variations, est remplacé par un problème de minimum pour une fonction de ces paramètres en nombre infini. C'est là une transformation purement formelle et très banale, mais elle mérite cependant d'être signalée parce que, ici, on peut raisonner sur les paramètres comme s'ils étaient indépendants. Je veux dire que l'on peut déterminer chaque paramètre par la condition que le rapport $\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{S}}$ considéré comme fonction de ce paramètre, supposé seul variable, soit minimum.

Soit C un contour convexe solution du problème des isopérimètres. Un tel contour, à supposer qu'il existe, n'est déterminé qu'à une similitude près; mais peu importe, raisonnons sur un contour C déterminé. Soient T_1, T_2, T_3, ... les tangentes à ce contour de directions α_1, α_2, α_3, ...

Considérons le polygone Π_p convexe limité par les tangentes dirigées T_1, T_2, ..., T_p. Je suppose ce polygone fini, c'est-à-dire ne s'étendant pas à l'infini, ce qui est vrai dès $p = 3$ si α_1, α_2, α_3 sont bien choisies. Le polygone Π_p admet p côtés ou du moins, s'il admet moins de p côtés et s'il n'admet pas, par exemple, de côté porté par T_k, c'est que T_k passe par un de ses sommets, que ce sommet est un point de C, car sans quoi T_k ne serait pas tangente à C. On peut donc toujours dire que Π_p a p côtés, à condition, peut-être, de considérer des côtés infiniment petits. Ceci va se préciser de suite : passons de Π_p à Π_{p+1} en coupant Π_p par T_{p+1} ; on sait à l'avance que les côtés de Π_p, qui seront coupés par T_{p+1}, sont ceux qui, dans la rose des directions, comprennent la direction α_{p+1}. Soient AB, AC ces deux côtés, qui sont finis ou infiniment petits, peu importe; la tangente T_{p+1} coupe certainement AB entre A et B et AC entre A et C, mais elle peut passer par A, par B ou par C. Dans tous les cas, pour passer de Π_p à Π_{p+1} on enlève de Π_p un triangle et non un polygone plus compliqué; c'est la remarque essentielle.

Ce triangle enlevé pour passer de Π_p à Π_{p+1} est de grandeur inconnue, mais il est connu à une homothétie près. Si L_p et S_p sont la longueur et l'aire de Π_p et si l'on coupe Π_p par une parallèle à T_{p+1} qui passe entre A et B et entre A et C, on remplace Π_p par Π'_{p+1} et L_p et S_p respectivement par $L_p - kl$, $S_p - k^2 s$; l et s étant des nombres qu'on peut calculer dès que α_1, α_2, ..., α_{p+1} sont donnés. Par suite $\frac{(L_{p+1})^2}{S_{p+1}}$ est au moins égal au minimum de $\frac{(L_p - kl)^2}{S_p - k^2 s}$; cherchons ce minimum. On l'obtient pour

$$\frac{2l}{L_p - kl} = \frac{2ks}{S_p - k^2 s}$$

ou

$$\text{(1)} \qquad \frac{L_p - kl}{S_p - k^2 s} = \frac{kl}{k^2 s} = \frac{L_p}{S_p}.$$

Et ce minimum est

$$\text{(2)} \qquad \frac{(L_p - kl)^2}{S_p - k^2 s} = \frac{L_p}{S_p}[L_p - kl] = \frac{L_p^2}{S_p}\left[1 - \frac{l}{s}\frac{S_p}{L_p}\frac{l}{L_p}\right] = \frac{L_p^2}{S_p} - \frac{l^2}{s}.$$

Ainsi, quand on passe de Π_p à Π_{p+1}, on gagne au plus $\frac{l^2}{s} = \varepsilon_p$, quantité connue à l'avance et ne dépendant que de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$; et l'on ne gagne cette quantité que si l'égalité (1) est vérifiée par la tangente T_p. Cette égalité s'interprète géométriquement d'une façon très simple : $\frac{2 S_p}{L_p}$ est le rayon d'un cercle inscrit dans un polygone de longueur L_p et d'aire S_p; $\frac{2 k^2 s}{kl}$ est le rayon du cercle exinscrit dans le triangle enlevé pour passer de Π_p à Π_{p+1} et inscrit dans l'angle A de ce triangle, c'est-à-dire dans celui des angles de Π_p dont le sommet n'est pas sommet de Π_{p+1}. Si donc Π_p est un polygone circonscriptible et si l'on gagne $\frac{l^2}{s} = \varepsilon_p$ en passant de Π_p à Π_{p+1}, Π_{p+1} est circonscrit au même cercle que Π_p.

Ceci étant, et supposant, comme précédemment, que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ soient choisies de manière que Π_3 soit un triangle, soit m le rapport $\frac{L^2}{S}$ pour ce triangle, m est connu, puisque le triangle est connu à une homothétie près. Le rapport $\frac{L^2}{S}$ pour Π_{p+1} sera au moins

$$m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \ldots - \varepsilon_p$$

et il ne sera égal à cette quantité que si la condition (1) est constamment remplie, c'est-à-dire si $\Pi_4, \Pi_5, \ldots, \Pi_{p+1}$ sont circonscrits au cercle inscrit dans Π_3. Si cette condition n'était pas remplie par Π_{k+1}, ayant été remplie par $\Pi_4, \Pi_5, \ldots, \Pi_k, \ldots, \Pi_{p+1}$, $\frac{L^2}{S}$ serait au moins

$$m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \ldots - \varepsilon_{k-1} - \varepsilon_{k+1} - \ldots - \varepsilon_p - \eta,$$

avec $\eta < \varepsilon_k$. Et ce « manque à gagner » $\varepsilon_k - \eta$ ne pourrait jamais être rattrapé dans la suite.

$\frac{L^2}{S}$ pour le contour C étant la limite du rapport correspondant pour les polygones Π_m, on voit que le cas où C est un cercle est une solution du problème des isopérimètres et que c'est la seule solution.

Chemin faisant, nous avons vu que le minimum de $\frac{L^2}{S}$ pour un polygone dont les côtés ont des directions données est toujours fourni par un polygone circonscriptible. Signalons encore une quantité de curieuses expressions, savoir toutes celles qui résultent de la formule

$$4\pi = m - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \ldots;$$

inutile de les expliciter ici.

J'ai déjà parlé à la Société mathématique des domaines de largeur constante et des courbes convexes qui les limitent appelées *orbiformes*. J'ai annoncé, à cette occasion, que de toutes les orbiformes de même largeur, orbiformes qui ont toutes la même longueur, celle qui a la plus grande aire est l'orbiforme circulaire, ce qui est évident d'après le théorème des isopérimètres et que celle qui a la plus petite aire est l'orbiforme équilatérale. Cela peut se démontrer très facilement par le procédé précédent.

Je définis comme précédemment l'orbiforme par des tangentes de direction α_1, α_2, ...; seulement je considérerai toujours, en même temps que la tangente T_p, de direction α_p, la tangente T'_p de direction $\alpha_p + \pi$. Par Π_p je désignerai maintenant le polygone convexe de $2p$ côtés, dont certains pourront être infiniment petits, circonscrit à l'orbiforme, et formé par les tangentes T_1, T'_1, T_2, T'_2, ..., T_p, T'_p. Pour passer de Π_p à Π_{p+1} il faudra maintenant retrancher de Π_p deux triangles et non plus un seul. Ces deux triangles AMN, A'M'N' ont leurs côtés parallèles et de sens contraires; ils sont homothétiques, le centre d'homothétie est le point de rencontre de AA', MM', NN'. D'ailleurs AA' est un axe de symétrie pour la figure formée par les droites indéfinies AM, A'M'; AN, A'N', parce que ces droites sont deux à deux parallèles et que la distance de AM à A'M est, comme celle de AN à A'N', la largeur constante de l'orbiforme. Donc AA' est bissectrice de $\widehat{MAN}$ et le centre O d'homothétie des triangles AMN, A'M'N' est le centre commun de deux circonférences exinscrites respectivement dans MAN, M'A'N'.

La somme des longueurs MN + M'N' est la base d'un triangle semblable à MON, dont les côtés ont donc des directions connues dès que l'on connaît α_1, α_2 ..., α_p, et dont la hauteur est la largeur de l'orbiforme. De même AM + A'M' a une valeur connue, et aussi AN + A'N'. De là résulte que la longueur de Π_{p+1} est la même pour toutes les orbiformes et de là résulte une démonstration peut-être nouvelle du fait connu et déjà rappelé que toutes les orbiformes de largeur d ont la même longueur πd.

Je reviens à la question de l'aire. On a, je l'ai dit,

$$\mathrm{MN} + \mathrm{M'N'} = \mathrm{C}, \tag{3}$$

C étant une constante. La somme des aires des deux triangles AMN, A'M'N', différence entre Π_p et Π_{p+1}, est

$$k\left(\overline{\mathrm{MN}}^2 + \overline{\mathrm{M'N'}}^2\right), \tag{4}$$

k étant connu et ne dépendant que des α_i. Le minimum de l'expression (4), MN et M'N' étant liés par la relation (3). s'obtient pour $MN = M'N'$ et le maximum pour MN ou $M'N' = O$. Dans le premier cas, O est au milieu de AA', MM', NN' et les deux triangles AMN, A'M'N' sont circonscrits au même cercle; dans le second cas, ou bien MN passe par A ou bien MN passe par A'.

Ceci étant, en raisonnant comme précédemment, on voit que l'orbiforme d'aire maximum est celle pour laquelle tous les polygones Π_p sont circonscriptibles, mais cela est évident d'après le théorème des isopérimètres.

Pour avoir l'orbiforme d'aire minimum, je pars de $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$, ce qui me donne pour Π_2 un losange. Si $\alpha_3 = \frac{\pi}{3}$, l'une des tangentes T_3 ou T'_3 doit passer par un sommet du losange; on voit ainsi que Π_3 est un triangle équilatéral. On peut supposer qu'il est formé par $T_1\,T_2\,T_3$, les tangentes T'_1, T'_2, T'_3 passant par les sommets de ce triangle. Quel que soit α_4, il faudra maintenant que T_4 ou T'_4 passe par un sommet du triangle, et de là on conclut de suite que l'orbiforme cherchée est constituée par les trois arcs de circonférences tracés respectivement de chacun des trois sommets de Π_3 pour centres et soustendus respectivement par les trois côtés de Π_3.

M. J. Coblyn : *De l'anallagmatisme des transformations quadratiques.*

La transformation quadratique

$$x' = \frac{U(x,y)}{T(x,y)}, \qquad y' = \frac{V(x,y)}{T(x,y)}$$

fait correspondre à chaque point $M(x,y)$ du plan un point $M'(x',y')$. L'auteur étudie le déplacement de la droite MM'.

Il détermine les transformations quadratiques à pôle qui possèdent des courbes anallagmatiques.

Dans les transformations dépourvues de pôle, il recherche les droites anallagmatiques.

Il applique ses résultats à la transformation perspective.